2.13.2 *Taxa geométrica de crescimento*

Se a variável observada y evolui de forma *cumulativa* – situação em que o incremento de um momento soma-se ao valor anterior da variável, como base de cálculo para o momento seguinte - sua trajetória pode ser descrita por uma função *exponencial*. Nessa função, mostrada na Figura 2.15, o parâmetro r corresponde à *taxa média geométrica* de crescimento de y no período.

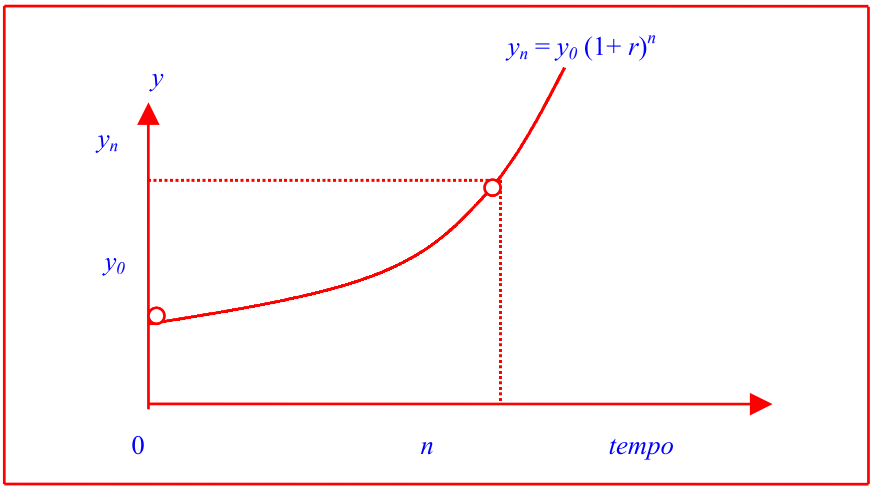

Figura 2.15 *Taxa de crescimento geométrico*

A função exponencial:

$$y_n = y_0 (1 + r)^n \qquad (2\text{-}6)$$

é a mesma utilizada em cálculos de *juros compostos*, situação em que os juros devidos em cada período de *tempo* são *capitalizados* – ou seja, incorporam-se ao *principal* para o cálculo do saldo devedor referente ao período subseqüente.

A partir de (2-6), segue-se:

$$r = \left(\frac{y_n}{y_0}\right)^{1/n} - 1 \qquad (2\text{-}7)$$

Utilizando logaritmos resulta:

$$\ln(1+r) = \left(\frac{\ln y_n - \ln y_0}{n}\right)$$

$$r = anti\ln\left(\frac{\ln y_n - \ln y_0}{n}\right) - 1 \qquad (2\text{-}8)$$

Uma fórmula matemática alternativa para (2-6) é:

$$y_n = y_0 . e^{b.n} \qquad (2\text{-}9)$$

Sendo: $e = 2{,}71828$

Comparando-se (2-6) e (2-9):

$$(1+r)^n = e^{bn}$$

$$n \ln(1+r) = bn$$

$$b = \ln(1+r) \qquad (2\text{-}10)$$

$$r = \text{anti} \ln b - 1$$

Admita a hipótese que a variável y do exemplo utilizado na seção 2.13.1 evolua conforme uma função exponencial. O cálculo da taxa média geométrica de crescimento de y será, utilizando-se (2-7):

$$r = \left(\frac{y_n}{y_0}\right)^{1/n} - 1$$

$$r = \left(\frac{25}{10}\right)^{1/6} - 1 = 0{,}165$$

$r = 16{,}5\%$ *ao período*

$$b = \ln(1 + 0{,}165)$$

$$b = 0{,}1527$$

Utilizando os *parâmetros* r e b obtidos, as equações (2-6) e (2-9), respectivamente, escrevem-se

$$y_n = 10\ (1{,}165)^n$$

$$y_n = 10.e^{0{,}1527.n} \qquad (2\text{-}11)$$

A projeção de y_n para n=8, seria:

$$y_8 = 10\ (1{,}165)^8 = 33{,}9$$

Que também equivale a:

$$y_8 = 10(2{,}7183)^{0{,}1527.8} = 33{,}9$$

A representação gráfica da função exponencial é apresentada na Figura 2.16.

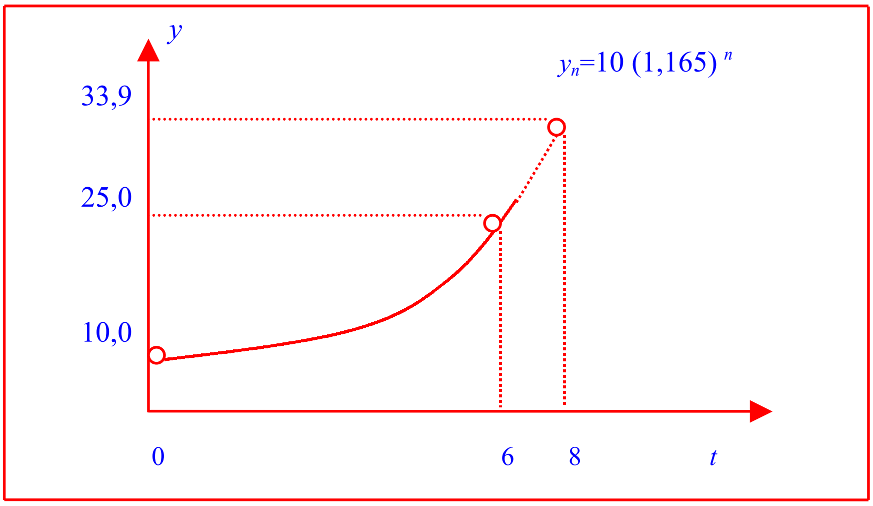

Figura 2.16 *Taxa de crescimento exponencial entre dois pontos - exemplo*

A diferença conceitual entre as equações (2-6) e (2-9) é que na primeira, a acumulação se dá a cada intervalo de tempo a que se refere a taxa r, enquanto que na segunda, essa acumulação é *instantânea*. Em (2-10), fazendo r_n a taxa de crescimento referida ao período n:

$$b = \lim_{n \to \infty} r_n$$

A maioria das calculadoras eletrônicas e planilhas de computador utilizam a forma da equação (2-9) para ajustamentos de dados. Assim, os procedimentos mostrados permitirão, nesses casos, converter os parâmetros ajustados, para a forma (2-6), mais familiar, devido ao seu uso em juros compostos.

Projeções feitas com base na hipótese de crescimento exponencial, quando aplicável o aritmético, ou vice-versa, podem levar a erros grosseiros. No exemplo anterior, ao final do oitavo período, se y crescer linearmente terá um valor de 30,0; se evoluir *exponencialmente* atingirá a 33,9. A discrepância entre as duas situações, em termos relativos, cresce explosivamente com n.

Uma aplicação comum da metodologia descrita para cálculo da taxa de crescimento geométrico consiste na estimativa de taxas de crescimentos populacionais – ou de segmentos de uma população, a partir de dados censitários. Outra situação usual é o cálculo da taxa de juros compostos, efetiva, quando se dispõe dos capitais inicial e final de uma operação financeira, em um prazo determinado.